на правах рукописи

УДК 517.925

Бельман Светлана Александровна

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПАРАМЕТРОМ

01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Бельман

Казань – 2011

Работа выполнена на кафедре математики и методики преподавания математических дисциплин
Рязанского государственного университета
имени С.А. Есенина

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
Терехин Михаил Тихонович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор
Малышев Юрий Валентинович

доктор физико-математических наук, профессор
Зейфман Александр Израилевич

Ведущая организация: Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарёва

Защита состоится ''26'' мая 2011 г. в 16 час. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 при Казанском (приволжском) федеральном университете по адресу: г.Казань, ул.Профессора М.Т.Нужина, д.1/37, Научно-исследовательский институт математики и механики им. Н.Г.Чеботарева, ауд.337(324).

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета.

Автореферат разослан ''18''апреля 2011г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук,
доцент Липачев Е.К.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В данной работе рассматриваются автономные нелинейные системы дифференциальных уравнений, зависящие от параметра. Задачей исследования является отыскание условий существования периодических решений системы, период которых находится в окрестности заданного числа.

Проблема нахождения периодического решения является одной из основных проблем теории дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения широко используются для моделирования процессов, происходящих в физических, химических и биологических системах. В частности, системы дифференциальных уравнений с параметром необходимо исследовать при анализе экономических моделей.

Такое широкое разнообразие применения теории периодических решений вызывает дополнительный интерес к более глубокому исследованию проблем существования периодических решений систем дифференциальных уравнений, к поиску методов исследования этих проблем.

Несмотря на то, что изучению периодических решений нелинейных систем дифференциальных уравнений посвящено большое количество работ, недостаточно изучены условия существования периодических решений, при рассмотрении которых требуется привлекать свойства нелинейных членов системы. Требует более глубокого рассмотрения вопрос о влиянии параметра на свойства нелинейных систем дифференциальных уравнений, особенно для систем, линейное приближение которых зависит от параметра.

Поэтому задача поиска условий существования периодического решения системы дифференциальных уравнений с заранее неизвестным периодом, который находится в окрестности заданного числа, является достаточно важной задачей. Все это подтверждает актуальность предлагаемой работы.

Цель работы состоит в получении условий существования ненулевых $\widetilde{\omega}$-периодических решений системы автономных дифференциальных уравнений.

Методика исследования. Отыскание решений нелинейных систем дифференциальных уравнений проводится в окрестности состояния равновесия, положение которого в пространстве зависит от параметра. Путем замены переменной вопрос существования $\widetilde{\omega}$-периодического решения исходной системы сводится к поиску 2π-периодического решения измененной системы. Решение полученной системы ищется в виде тригонометрического ряда. Методом разбиения основного пространства на три подпространства устанавливается соответствие между 2π-периодическим решением системы и решением операторных уравнений. Методом неподвижной точки устанавливаются условия разрешимости операторных уравнений и, следовательно, условия существования периодических решений системы дифференциальных уравнений.

Научная новизна. В работе найдены новые достаточные условия существования периодических решений системы дифференциальных уравнений с заранее неизвестным периодом.

Практическая ценность работы. Полученные в работе результаты могут быть использованы при исследовании конкретных систем автономных дифференциальных уравнений, являющихся моделями реальных процессов, протекающих в природе и социуме.

Апробация диссертации. Полученные результаты докладывались на

1. Заседаниях научно-исследовательского семинара по качественной теории дифференциальных уравнений в Рязанском государственном университете им. С.А. Есенина;
2. X, XIII Всероссийских научно-технических конференциях студентов, молодых ученых и специалистов “Новые информационные технологии в научных исследованиях и в образовании” в Рязанском государственном радиотехническом университете 2005, 2008г.;
3. VII Международной конференции "Дифференциальные уравнения и их приложения" в г. Саранск, 2008;
4. XVI конференции серии «Математика. Компьютер. Образование», в г.Пущино 2009г;
5. Международной научной конференции «Современные проблемы математики, механики, информатики» в Тульском государственном университете 2009г;
6. Международной конференции «Современные проблемы математики, механики и их приложений» в МГУ, 2009г.

Публикации. Основные результаты работы отражены в двенадцати публикациях, список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на параграфы, заключения и библиографического списка литературы. Общий объем диссертации – 96 страниц машинописного текста. Библиографический список содержит 99 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дается обоснование актуальности темы диссертации, содержится краткий обзор работ по ее тематике, сформулированы основные результаты, полученные в работе.

В главе 1 рассматривается автономная система дифференциальных уравнений. **§1** содержит основные определения и вспомогательные результаты. В диссертации рассматривается автономная система дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dy}{d\tau} = \psi(y,\lambda), \tag{1.1}$$

в которой $y \in E_n$, $\lambda \in E_p$, λ – параметр, $\psi(y,\lambda)$ – конечная сумма вектор-форм относительно вектора y. Предполагаем, что в точке $(y_0,\lambda_0) \in D(\delta_0)$ $\psi(y_0,\lambda_0)=0$, система уравнений $\psi(y,\lambda)=0$ имеет решения $y=\theta_i(\lambda)$, $i \in \{1,2,\ldots,r\}$, $r \ge 1$, $y_0=\theta_i(\lambda_0)$ такие, что $\psi(\theta_i(\lambda),\lambda) \equiv 0$, и в окрестности точки $\theta_i(\lambda)$ справедливо представление

$$\psi(y,\lambda)=A^*(\theta_i(\lambda),\lambda)(y-\theta_i(\lambda))+C_s^*(\theta_i(\lambda),\lambda,y-\theta_i(\lambda))+D^*(\theta_i(\lambda),\lambda,y-\theta_i(\lambda)),$$

где $C^*(\theta_i(\lambda),\lambda,y-\theta_i(\lambda))$ – форма порядка $s>1$ относительно переменных y, λ, $D^*(\theta_i(\lambda),\lambda,y-\theta_i(\lambda))$ – конечная сумма форм порядка более высокого, чем s, относительно тех же переменных, $C_s^*(\theta_i(\lambda),\lambda,0) \equiv 0$, $D^*(\theta_i(\lambda),\lambda,0) \equiv 0$.

Ставится задача – определить условия существования $\tilde{\omega}$-периодического решения системы (1.1) в окрестности точки $\theta_i(\lambda)$. При этом $\tilde{\omega}$ принадлежит окрестности некоторого известного числа.

С помощью замены переменных $x=y-\theta_i(\lambda)$, $t=\frac{2\pi}{\tilde{\omega}}\tau$, систему (1.1) можно привести к системе вида

$$\mathrm{R}(x,\lambda,\mu) \equiv \dot{x}-\omega_0 A(\lambda)x-\mu \mathrm{A}(\lambda)x-(\omega_0+\mu)(C(x,\lambda)+D(x,\lambda))=0, \quad (1.5)$$

в которой $\frac{1}{2\pi}A^*(\theta_i(\lambda),\lambda)=A(\lambda)$, $A(\lambda)=A+K(\lambda)$, $\lim\limits_{\lambda\to 0}K(\lambda)=0$, $\frac{1}{2\pi}C_s^*(\theta_i(\lambda),\lambda,x)=C(x,\lambda)$, $\frac{1}{2\pi}D^*(\theta_i(\lambda),\lambda,x)=D(x,\lambda)$, $\tilde{\omega}=2\pi(\omega_0+\mu)$, для простоты записей индекс i опустили. Число ω_0 считаем известным, μ – параметр.

Отметим, что $\tilde{\omega}$-периодическому по τ решению системы (1.1) соответствует 2π-периодическое по t решение системы (1.5). Будем искать 2π-периодическое решение системы (1.5).

Рассмотрим множество M_n всех тригонометрических рядов вида $x=a_0+\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k \cos kt + b_k \sin kt$, где a_0, a_k, b_k – n-мерные векторы (коэффициенты ряда). Ряд $0+\sum\limits_{k=1}^{+\infty} 0\cos kt + 0\sin kt$ назовем нулевым элементом множества M_n (обозначим его 0). Под $\dot{x}$ будем понимать ряд вида $\dot{x}=\sum\limits_{k=1}^{+\infty} kb_k \cos kt - ka_k \sin kt$. На множестве M_n определяются операции сложения рядов, умножения ряда на число и умножения ряда на матрицу.

Определение 1.1. Элемент $x_0 \in M_n$ назовем 2π-периодическим решением системы (1.5) при некотором λ $(|\lambda| \le \delta_0)$, если $R(x_0,\lambda,\mu)$ – нулевой элемент множества M_n.

Определим оператор B равенством

$$Bx = \dot{x} - \omega_0 Ax. \tag{1.6*}$$

Очевидно, что B – линейный оператор на множестве M_n.

Теорема 1.1. Если оператор B не имеет нулевого собственного значения, то он имеет обратный на множестве M_n.

Теорема 1.2. Оператор B имеет собственный элемент, соответствующий нулевому собственному значению тогда и только тогда, когда существует такое $k \in \boldsymbol{N}_0$, что $\det L(k) = 0$, где $L(k) = \begin{pmatrix} -\omega_0 A & kE \\ -kE & -\omega_0 A \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{N}_0$ – множество целых неотрицательных чисел.

Замечание 1.1. В случае, когда определитель матрицы $L(k)$ тождественно не равен нулю, уравнение $\det L(k) = 0$ при фиксированном ω_0 имеет не более чем $2n$ различных натуральных корней.

Далее предполагается, что определитель матрицы $L(k)$ тождественно нулю не равен.

Введем пространство $M_n(l_1)$ – пространство тригонометрических рядов $x = a_0 + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k \cos kt + b_k \sin kt \in M_n$, коэффициенты которых удовлетворяют условию $(a_0, a_1, b_1, ..., a_k, b_k, ...) \in l_1$. Норму элемента $x = a_0 + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k \cos kt + b_k \sin kt \in M_n(l_1)$ определим так: $\|x\| = |a_0| + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} |a_k| + |b_k|$.

Обозначим $Z_n(\varepsilon) = \{(z, \lambda) : z \in M_n(l_1), \|z\| \le \varepsilon, \lambda \in E_p, |\lambda| \le \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$ – некоторое число.

Доказано, что на множестве $Z_n(\varepsilon)$ справедливы неравенства

$$\begin{gathered} \|C(x_1, \lambda) - C(x_2, \lambda)\| \le q_0 \varepsilon^{s-1} \|x_1 - x_2\| \\ \|D(x_1, \lambda) - D(x_2, \lambda)\| \le \overline{q} \|x_1 - x_2\| \end{gathered}, \tag{1.8}$$

где $q_0 > 0$ – некоторое число, $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{\overline{q}}{\varepsilon^{s-1}} = 0$.

В **§2** основное пространство представляется в виде прямой суммы трех подпространств. Задача нахождения решения системы дифференциальных уравнений сводится к задаче разрешимости операторных уравнений методом неподвижной точки. Получено необходимое и достаточное условие существования периодического решения исходной системы.

Пусть число ω_0 такое, что у оператора B существует нулевое собственное значение. Множество всех натуральных корней уравнения $\det L(k) = 0$ обозначим через $W = \{k_1, k_2, ..., k_q\}$. Считаем, что при любом $k \in W$ матрица $L(k)$ имеет жорданову форму. Тогда пространство $M_n(l_1)$ представимо в виде прямой суммы трех подпространств $M_n(l_1) = W_0 \oplus W_1 \oplus W_2$, где W_0 – ядро оператора B, образованное собственными элементами $h_1, ... , h_m$ оператора B, соответствующими нулевому собственному значению, W_2 является инвариантным подпространством оператора B, подпространство W_1 образовано элементами $g_1, \ldots, g_l$, которые однозначно определяются свойствами оператора B.

В этом случае любой элемент $x \in M_n(l_1)$ можно единственным образом представить в виде

$$x = Px + \sum_{i=1}^{m} \xi_i(x) h_i + \sum_{j=1}^{l} \eta_j(x) g_j, \tag{1.8*}$$

где P – оператор проектирования пространства $M_n(l_1)$ в подпространство W_2, $\xi_i(x), \eta_j(x)$ – линейные функционалы, определенные равенствами $\xi_i(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x h_i dt$, $\eta_j(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x g_j dt$, $\xi(x) = \left(\xi_1(x), \xi_2(x), \ldots, \xi_m(x)\right)$, $\eta(x) = \left(\eta_1(x), \eta_2,(x), \ldots, \eta_l(x)\right)$. (Если $k = 0$, то $\xi_i(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x h_i dt$, $\eta_j(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x g_j dt$.) Под произведением коэффициентов ряда понимается скалярное произведение векторов.

Теорема 1.3. Если существует число $d > 0$ такое, что при любом $k \notin W$ $\left\| L^{-1}(k) \right\| \le d$, то оператор B^{-1} на множестве W_2 линейный и ограниченный.

Теорема 1.4. При любом $k \notin W$ существует такое число $d > 0$,что $\left\| L^{-1}(k) \right\| \le d$.

Таким образом, условие теоремы 1.3 выполнено при любом $k \notin W$.

Теорема 1.5. Норма оператора P равна 1.

В **§3** задача нахождения решения системы дифференциальных уравнений сводится к задаче разрешимости операторных уравнений методом неподвижной точки.

Учитывая вид решения (1.8*), можно убедиться, что система (1.5) равносильна системе:

$$P(R(x, \lambda, \mu)) = 0, \tag{1.9}$$

$$\xi\left(R\left(x, \lambda, \mu\right)\right) = 0, \ \eta\left(R\left(x, \lambda, \mu\right)\right) = 0 \tag{1.10}$$

Решение системы (1.9), (1.10) ищем во множестве $M_n(l_1)$ в виде $x(\alpha, \beta) = Px(\alpha, \beta) + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i h_i + \sum_{i=1}^{l} \beta_i g_i$, где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_l)$ – постоянные векторы, подлежащие определению, нормы которых определяются соответственно равенствами $\|\alpha\| = \max_i \left\{ |\alpha_i| \right\}$, $\|\beta\| = \max_i \left\{ |\beta_i| \right\}$.

Из определения матрицы $L(k_j)$ и неравенства $\det L(k) \neq 0$ при $k \in N_0$ следует, что равенство (1.9) можно записать в виде

$$z = -B^{-1}P\big(\omega_0 K(\lambda)x(\alpha,\beta) + \mu A(\lambda)x(\alpha,\beta) + (\omega_0 + \mu)\big(C(x(\alpha,\beta),\lambda) + D(x(\alpha,\beta),\lambda)\big)\big), \quad (1.11)$$

где $z = Px(\alpha,\beta)$. Символом $\Gamma(\alpha,\beta,\lambda,\mu)$ обозначим оператор, определяемый правой частью равенства (1.11). Очевидно, для любого $z \in W_2$ $\Gamma(\alpha,\beta,\lambda,\mu)z \in W_2$.

Для краткости записей положим $\Delta_1(\varepsilon) = \{a : \|a\| \le \varepsilon\}$, $\Delta_2(\varepsilon) = \{\beta : \|\beta\| \le \varepsilon\}$, $\Lambda(\varepsilon) = \{\lambda : |\lambda| \le \varepsilon\}$, $M(\varepsilon) = \{\mu : |\mu| \le \varepsilon\}$, $T(\varepsilon) = \{z : \|z\| \le \varepsilon\}$, $\bar{d}_0 = 2d_0$.

Теорема 1.6. Существует число $\varepsilon_1 > 0$ такое, что при любых $\varepsilon \in (0,\varepsilon_1]$, $\alpha \in \Delta_1(\varepsilon)$, $\beta \in \Delta_2(\varepsilon)$, $\lambda \in \Lambda(\varepsilon)$, $\mu \in M(\varepsilon)$ оператор $\Gamma(\alpha,\beta,\lambda,\mu)$ на множестве $T(\varepsilon)$ имеет единственную неподвижную точку.

Далее будем предполагать, что число ε_1 выбрано так, что для любого $\varepsilon \in (0,\varepsilon_1]$ выполнены условия теоремы 1.6.

Замечание 1.3. На множестве $T(\varepsilon)$ оператор $\Gamma(\alpha,\beta,\lambda,\mu)$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной γ.

Замечание 1.4. Если при $\alpha^i \in \Delta_1(\varepsilon)$, $\beta^i \in \Delta_2(\varepsilon)$, $i = \overline{1,2}$, $Px(\alpha^1,\beta^1), Px(\alpha^2,\beta^2)$ – неподвижные точки соответственно операторов $\Gamma(\alpha^1,\beta^1,\lambda,\mu)$, $\Gamma(\alpha^2,\beta^2,\lambda,\mu)$ на множестве $T(\varepsilon)$, то

$$\left\|Px(\alpha^1,\beta^1) - Px(\alpha^2,\beta^2)\right\| < \frac{\gamma_0}{1-\gamma_0}\left(\sum_{i=1}^{m}\left|\alpha_i^1 - \alpha_i^2\right| + \sum_{i=1}^{l}\left|\beta_i^1 - \beta_i^2\right|\right).$$

Замечание 1.5. При доказательстве теоремы 1.6 была получена промежуточная оценка для оператора Γ

$$\|\Gamma(\alpha,\beta,\lambda,\mu)z\| \le \bar{d}_0(\omega_0\varepsilon + 2\omega_0 q_0\varepsilon^{s-1} + \varepsilon A + \varepsilon^2 + 2q_0\varepsilon^{s-1})(\|z\| + \|\alpha\| + \|\beta\|).$$

Положим $z = 0$ имеем

$$\|\Gamma(\alpha,\beta,\lambda,\mu)0\| \le \bar{d}_0(\omega_0\varepsilon + 2\omega_0 q_0\varepsilon^{s-1} + \varepsilon A + \varepsilon^2 + 2q_0\varepsilon^{s-1})(\|\alpha\| + \|\beta\|).$$

Учитывая последнее неравенство и то, что оператор $\Gamma(\alpha,\beta,\lambda,\mu)$ удовлетворяет условию Липшица на множестве $T(\varepsilon)$, получим

$$\|Px(\alpha,\beta)\| \le \frac{\bar{d}_0(\omega_0\varepsilon + 2\omega_0 q_0\varepsilon^{s-1} + \varepsilon A + \varepsilon^2 + 2q_0\varepsilon^{s})}{1 - \bar{d}_0(\omega_0\varepsilon + 2\omega_0 q_0\varepsilon^{s-1} + \varepsilon A + \varepsilon^2 + 2q_0\varepsilon^{s})}\big(\|\alpha\| + \|\beta\|\big).$$

Из теоремы 1.6 следует, что для того чтобы, $x(\alpha,\beta)$ было решением системы (1.5), необходимо и достаточно, чтобы векторы α и β удовлетворяли равенствам

$$\xi(R(x(\alpha,\beta),\lambda,\mu))=0, \quad \eta(R(x(\alpha,\beta),\lambda,\mu))=0, \tag{1.12}$$
где $R(x(\alpha,\beta),\lambda,\mu)\equiv Bx(\alpha,\beta)-\ \omega_0 K(\lambda)x(\alpha,\beta)-\mu Ax(\alpha,\beta)-\mu K(\lambda)x(\alpha,\beta)-$
$\omega_0 C(x(\alpha,\beta),\lambda)-\mu C(x(\alpha,\beta),\lambda)-(\omega_0+\mu)D(x(\alpha,\beta),\lambda)$.

В **главе 2** рассматривается задача разрешимости операторных уравнений (1.12). Найдены необходимые и достаточные условия существования ненулевых решений системы (1.12). Показано применение теории нелинейных векторных уравнений к вопросу существования ненулевых $\tilde{\omega}$-периодических решений автономных систем дифференциальных уравнений.

В **§1** рассмотрены операторные уравнения (1.12). Из свойств операторов *P*, *B* следует, что систему уравнений (1.12) можно записать соответственно в виде
$$M_1\beta-\tilde{K}_1(\lambda)\alpha+C_1(J(\alpha,\beta),\lambda)\omega_0+\mathrm{O}_1(\mu)+o_1(\varepsilon^s)=0, \tag{2.4}$$
$$M_2\beta-\tilde{K}_2(\lambda)\beta+C_2(J(\alpha,\beta),\lambda)\omega_0+\mathrm{O}_2(\mu)+o_2(\varepsilon^s)=0, \tag{2.5}$$
где M_1, M_2 – постоянные матрицы, $\tilde{K}_1(\lambda), \tilde{K}_2(\lambda)$ - матрицы, зависящие от параметра λ, $C(J(\alpha,\beta))$ – конечные суммы вектор-форм относительно α,β, $J(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i h_i+\sum_{i=1}^{l}\beta_i g_i$, $\gamma=colon(\alpha,\beta)$.

Положим $M=colon(M_1,M_2)$, $\tilde{K}(\lambda)=colon(-\tilde{K}_1(\lambda),-\tilde{K}_2(\lambda))$, $\tilde{C}(J(\alpha,\beta),\lambda)=colon(C_1(J(\alpha,\beta),\lambda),C_2(J(\alpha,\beta),\lambda))$, $\gamma=colon(\alpha,\beta)$, $\mathrm{O}(\mu)=colon(\mathrm{O}_1(\mu),\mathrm{O}_2(\mu))$, $o(\varepsilon^s)=colon(o_1(\varepsilon^s),o_2(\varepsilon^s))$. Систему уравнений (2.4) и (2.5) запишем следующим образом
$$M\beta+\tilde{K}(\lambda)\gamma+\tilde{C}(J(\alpha,\beta),\lambda)\omega_0+\mathrm{O}(\mu)+o(\varepsilon^s)=0. \tag{2.6*}$$

Предположим, что $\mathrm{rang}M=r$, $0<r\le l$. Заменой переменных $\beta=\Phi\beta_1$, где Φ - матрица, столбцами которой являются линейно независимые решения системы $M\beta=0$. Последнюю сведем к системе
$$\tilde{K}(\lambda)\tilde{\gamma}+\tilde{C}(J(\alpha,\Phi\beta_1),\lambda)\omega_0+\mathrm{O}(\mu)+o(\varepsilon^s)=0, \tag{2.6}$$
в которой $\tilde{\gamma}=(\alpha,\beta_1)$.

В **§2** определены условия существования ненулевого решения системы (2.6) в случае линейной зависимости $\tilde{K}(\lambda)$ от λ. Учитывая, что $\tilde{C}(J(\alpha,\beta),\lambda)\omega_0+o(\varepsilon^s)=o(\varepsilon^s)$, и полагая $\tilde{\gamma}=\rho e,\ \rho>0,\ e=(e_\alpha,e_\beta),\ \alpha=\rho e_\alpha$, $\beta_1=\rho e_\beta$, систему (2.6) запишем в виде
$$\rho\tilde{K}(\lambda)e+O(\mu)+o(\varepsilon^s)=0.$$

И, следовательно, в виде
$$K^*(e)\lambda+\frac{O(\mu)}{\rho}+\frac{o(\varepsilon^s)}{\rho}=0.$$

где матрица $K^*(e)$ определяется равенством $\widetilde{K}(\lambda)e = K^*(e)\lambda$.

Введем обозначение $E = \{e : |e| = 1\}$. Пусть $e^* \in E$ такое, что $rang K^*(e^*) = m + l$:

$$K^*(e^*)\lambda + \frac{O(\mu)}{\rho} + \frac{o(\varepsilon^s)}{\rho} = 0. \tag{2.7}$$

Предположим, что минор порядка $m + l$ расположен на первых $m + l$ столбцах матрицы $K^*(e^*)$. Тогда систему (2.7) можно записать так

$$K_1^*(e^*)\lambda_1 + K_2^*(e^*)\lambda_2 + \frac{O(\mu)}{\rho} + \frac{o(\varepsilon^s)}{\rho} = 0,$$

где $K^*(e^*)\lambda = K_1^*(e^*)\lambda_1 + K_2^*(e^*)\lambda_2$, $K_1^*(e^*) - (m+l)\times(m+l)$-матрица, $K_1^*(e^*) - (m+l)\times(p-(m+l))$-матрица. Отсюда

$$\lambda_1 = -\left(K_1^*(e^*)\right)^{-1}\left(K_2^*(e^*)\lambda_2 + \frac{O(\mu)}{\rho} + \frac{o(\varepsilon^s)}{\rho}\right).$$

Оператор Γ определим равенством

$$\Gamma\lambda_1 = -\left(\left(K_1^*(e^*)\right)^{-1} K_2^*(e^*)\lambda_2 + \left(K_1^*(e^*)\right)^{-1}\frac{O(\mu)}{\rho} + \left(K_1^*(e^*)\right)^{-1}\frac{o(\varepsilon^s)}{\rho}\right).$$

Теорема 2.1. Существуют положительные числа δ, δ_1 такие, что при любых фиксированных λ_2 $(|\lambda_2| \le \delta_1)$, μ $(|\mu| \le \delta_1)$ оператор Γ имеет неподвижную точку на множестве λ_1 $(|\lambda_1| \le \delta)$.

Фиксируем ε^* $(0 < \varepsilon^* \le \delta)$, α^* $(|\alpha^*| < \varepsilon^*)$, β_1^* $(|\beta_1^*| < \varepsilon^*)$, μ^* $(|\mu^*| \le \delta_1)$, λ_2^* $(|\lambda_2^*| \le \delta)$. Тогда существует λ_1^* $(|\lambda_1^*| \le \delta)$ такое, что $\Gamma\lambda_1^* = \lambda_1^*$. Следовательно, выполнено равенство

$$\widetilde{K}(\lambda^*)\widetilde{\gamma}^* + \mathrm{O}(\mu^*) + o(\varepsilon^{*s}) = 0,$$

где $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*)$, $\widetilde{\gamma}^* = (\alpha^*, \beta_1^*)$, а значит и равенство

$$M\beta^* + \widetilde{K}(\lambda^*)\gamma^* + \mathrm{O}(\mu^*) + o(\varepsilon^*) = 0,$$

то есть $x(\alpha^*, \beta^*) = Px(\alpha^*, \beta^*) + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^* h_i + \sum_{i=1}^{l} \beta_i^* g_i$ - ненулевое решение системы (1.5).

Пример 2.1. Пусть дана система вида

$$\begin{aligned}
\frac{dy_1}{d\tau} &= y_1^2 - (2\lambda_2 + 4\lambda_1^2)y_1 + 8\lambda_1^2\lambda_2, \\
\frac{dy_2}{d\tau} &= y_2 y_3 - 3y_2 - \lambda_2 y_2 - \lambda_1^2 y_2 - \lambda_2^2 y_3 + 3\lambda_2^2 + \lambda_2^3 + \lambda_1^2\lambda_2^2, \\
\frac{dy_3}{d\tau} &= -y_2 y_3 + 2y_3 - 3\lambda_2 y_3 + \lambda_1 y_2 - 2\lambda_1 + 3\lambda_1\lambda_2.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Непосредственным вычислением установлены точки $\theta_1(\lambda_1,\lambda_2)=(4\lambda_1^2,2-3\lambda_2,3+\lambda_2+\lambda_1^2)$, $\theta_2(\lambda_1,\lambda_2)=(2\lambda_2,2-3\lambda_2,3+\lambda_2+\lambda_1^2)$ при любых фиксированных $\lambda_1,\lambda_2\in\Lambda(\delta_0)$, являющиеся состояниями равновесия системы (2.8). Установлено, что в окрестности точки $\theta_1(\lambda_1,\lambda_2)=(4\lambda_1^2,2-3\lambda_2,3+\lambda_2+\lambda_1^2)$ система (2.8) имеет решение $y_1^*=4\lambda_1^2+o(\varepsilon)$, $y_2^*=\rho^*\sin\frac{2\pi}{\widetilde{\omega}}\tau+2-3\lambda_2+o(\varepsilon)$, $y_3^*=\rho^*\sin\frac{2\pi}{\widetilde{\omega}}\tau+3+\lambda_2+$ $+\lambda_1^2+o(\varepsilon)$, в окрестности точки $\theta_2(\lambda_1,\lambda_2)=(2\lambda_2,2-3\lambda_2,3+\lambda_2+\lambda_1^2)$ – решение $y_1^{**}=2\lambda_2+o(\varepsilon)$, $y_2^{**}=\rho^*\sin\frac{2\pi}{\widetilde{\omega}}\tau+2-3\lambda_2+o(\varepsilon)$, $y_3^{**}=\rho^*\sin\frac{2\pi}{\widetilde{\omega}}\tau+3+\lambda_2+\lambda_1^2+o(\varepsilon)$, $\widetilde{\omega}=\frac{1}{\sqrt{6}}+\mu$, $(|\mu|\le\delta)$, $\delta>0$.

В **главе 3** изложен алгоритм нахождения необходимых и достаточных условий существования ненулевых решений системы.

В **§1** рассмотрены условия существования ненулевого решения системы (2.6) в случае нелинейной зависимости $\widetilde{K}(\lambda)$ от λ.

Пусть $\chi=(\widetilde{\gamma},\lambda)$, $\mathrm{H}_s(\widetilde{\gamma},\lambda)=\widetilde{\mathrm{K}}(\lambda)\widetilde{\gamma}+\widetilde{C}(J(\alpha,\Phi\beta_1),\lambda)\omega_0$. Система (2.6) примет вид:

$$\mathrm{H}_s(\chi)+\mathrm{O}(\mu)+o(\varepsilon^s)=0, \tag{3.2}$$

где $\mathrm{H}_s(\chi)$ – s-мерная вектор-форма относительно переменной χ. Введем замену $\chi=\rho e$, $\rho>0$, $e\in\mathrm{E}$, $\mathrm{E}=\{e:|e|=1\}$. Тогда, полагая $\varepsilon=\rho$, систему (3.2) сведем к системе

$$H_s(e)+\frac{\mathrm{O}(\mu)}{\rho^s}+O(\rho)=0. \tag{3.5}$$

Теорема 3.1. Если для любого $e\in\mathrm{E}$ $\mathrm{H}_s(e)\ne0$, то существует окрестность точки $\chi=0$ в которой нет ненулевых решений системы (3.5).

Далее предполагаем, что существует $e^*\in E$ такое, что $\mathrm{H}_s(e^*)=0$. Вектор-форму $\mathrm{H}_s(e)$ представим равенством

$$H_s(e)=D(e^*)(e-e^*)+\sum_{i=2}^{s}P_i(e^*,e-e^*),$$

где $D(e^*)$ – значение матрицы Якоби вектор-формы $\mathrm{H}_s(e)$, $P_i(e^*,e-e^*)$ – вектор-форма порядка i относительно $e-e^*$. Положив $\theta=e-e^*$, систему (3.5) запишем в виде

$$D(e^*)\theta+\sum_{i=2}^{s}P_i(e^*,\theta)+O(\rho)=0. \tag{3.6}$$

Теорема 3.2. Если $rangD(e^*)=r$, $r=m+l$, то система (3.6) имеет ненулевое решение в достаточно малой окрестности e^*.

В случае, когда $r<m+l$. Систему (3.6) можно представить в виде

$$
\begin{gathered}
D^*\theta+\sum_{i=2}^{s}\overline{P}_i\left(e^*,\theta\right)+\frac{\overline{\mathrm{O}}(\mu)}{\rho^s}+\overline{\mathrm{O}}(\rho)=0,\\
\sum_{i=2}^{s}\overline{\overline{P}}_i\left(e^*,\theta\right)+\frac{\overline{\overline{\mathrm{O}}}(\mu)}{\rho^s}+\overline{\overline{\mathrm{O}}}(\rho)=0,
\end{gathered}
\tag{3.9}
$$

где D^* - матрица размерности $r\times(m+p)$, $\overline{P}_i\left(e^*,\theta\right)$, $\overline{\overline{P}}\left(e^*,\theta\right)$ - вектор-формы порядка i, $\lim\limits_{\rho\to 0}\overline{O}(\rho)=0$, $\lim\limits_{\rho\to 0}\overline{\overline{O}}(\rho)=0$ $\lim\limits_{\mu\to 0}\dfrac{\overline{O}(\mu)}{\rho^s}=0$, $\lim\limits_{\mu\to 0}\dfrac{\overline{\overline{\mathrm{O}}}(\mu)}{\rho^s}=0$ при фиксированном ρ. Предположим, существование $j\le s$ такого, что $\overline{\overline{P}}_j\left(e^*,\theta\right)\not\equiv 0$ и для любого $i<j$ $\overline{\overline{P}}_i\left(e^*,\theta\right)\equiv 0$. Тогда систему (3.9) перепишем следующим образом

$$
\begin{gathered}
D^*\theta+\sum_{i=2}^{s}\overline{P}_i\left(e^*,\theta\right)+\frac{\overline{\mathrm{O}}(\mu)}{\rho^s}+\overline{\mathrm{O}}(\rho)=0,\\
\overline{\overline{P}}_j\left(e^*,\theta\right)+\overline{\overline{o}}\left(|\theta|^j\right)+\frac{\overline{\overline{\mathrm{O}}}(\mu)}{\rho^s}+\overline{\overline{\mathrm{O}}}(\rho)=0,
\end{gathered}
\tag{3.10}
$$

В системе (3.10) сделаем замену $\theta=\rho_1 u$, $\rho_1>0$, получим систему

$$
T(u)+\rho_1\sum_{i=2}^{s}P_i^*\left(e^*,\rho_1,u\right)+o\left(|u|,\rho_1\right)+O\left(\mu,\rho^s,\rho_1\right)+O\left(\rho,\rho_1\right)=0, \tag{3.12}
$$

в которой $T(u)=colon\left(D^*u,\overline{\overline{P}}_j\left(e^*,u\right)\right)$, $\rho_1\sum\limits_{i=2}^{s}P_i^*\left(e^*,\rho_1,u\right)=$ $=colon\left(\rho_1\sum\limits_{i=2}^{s}\overline{P}_i\left(e^*,\rho_1,u\right),0\right)$, $o\left(|u|,\rho_1\right)=colon\left(0,\overline{\overline{o}}\left(|u|,\rho_1\right)\right)$,

$$
\mathrm{O}\left(\mu,\rho^s,\rho_1\right)=colon\left(\frac{\overline{\mathrm{O}}(\mu)}{\rho^s\rho_1},\frac{\overline{\overline{\mathrm{O}}}(\mu)}{\rho^s\rho_1^j}\right),\ \mathrm{O}\left(\rho,\rho_1\right)=colon\left(\frac{\overline{O}(\rho)}{\rho_1},\frac{\overline{\overline{O}}(\rho)}{\rho_1^j}\right).
$$

Пусть множество $U=\{u:|u|=1\}$.

Теорема 3.3. Если для любого $u\in U$ $T(u)\ne 0$, то в любой окрестности точки $\chi=0$ существует множество, в котором нет ненулевых решений системы (2.6).

Далее предполагаем, что существует $u^*\in U$ такое, что $T\left(u^*\right)=0$. В окрестности точки u^* $T(u)$ представим в виде:

$$
T(u)=\begin{pmatrix} D^*v \\ \widetilde{D}\left(u^*\right)v+\sum\limits_{i=2}^{s}L_i\left(u^*,v\right)\end{pmatrix},
$$

где $\widetilde{D}\left(u^*\right)$ – матрица Якоби, $v=u-u^*$. Обозначим $\overline{D}\left(u^*\right)v=colon\left(D^*v,\widetilde{D}\left(u^*\right)v\right)$, $\sum\limits_{i=2}^{s}\overline{L}_i\left(u^*,v\right)=colon\left(0,\sum\limits_{i=2}^{s}L_i\left(u^*,v\right)\right)$.

Отсюда система (3.12) примет вид

$$\overline{D}\left(u^*\right)v + \sum_{i=2}^{s} \overline{L_i}\left(u^*, v\right) + o\left(|u|, \rho_1\right) + \frac{O(\mu)}{\rho^s \rho_1} + O\left(\rho, \rho_1\right) = 0. \tag{3.13}$$

Теорема 3.4. Если $rang\widetilde{D}\left(u^*\right) = m + l$, то система (2.6) имеет ненулевое решение в достаточно малой окрестности $\chi = 0$.

Пусть $rang\widetilde{D}\left(u^*\right) < m + l_1$, тогда построенный алгоритм поиска ненулевых решений в случае нелинейной зависимости $K(\lambda)$ от λ может закончиться на конечном числе шагов, если:

1) матрица вновь полученной системы линейных приближений имеет ранг $m+l_1$, тогда система (1.1) имеет ненулевое периодическое решение;
2) вновь полученная система не имеет ненулевых решений в достаточно малой окрестности точки $\chi = 0$.

В противном случае, алгоритм продолжается неограниченно, и проблема нахождения периодического решения системы (1.1) не решается предложенным методом.

В **§2** исследована математическая модель стабильной работы трехсекторной экономики. Предположим, что y - объем производственных фондов (объем сырья, трудоемкость, квалификация рабочих и др.), λ определяет внешние воздействия (уплата налогов, конкуренция, потребительский спрос и другие факторы), $\dot{y}$ - темп изменения фондов у, который пропорционален наличному объему фондов, регулярное обновление производственных фондов происходит за счет использования внутренних резервов и внешних инвестиций.

Под стабильной работой многосекторной экономики понимаем циклическое изменение производственных фондов экономики.

Экономическая задача состоит в определении условий, стабильного развития предприятия.

Математическая модель трехсекторной рассмотрена в виде

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \lambda_2 y_1 + \lambda_1 y_3 + \lambda_1 y_2 y_3 + \lambda_1 \lambda_2 y_1 y_2 y_3, \\ \dot{y}_2 &= y_3 + \lambda_1 y_2 + \lambda_2 y_1 y_3 + \lambda_1 \lambda_2 y_1 y_2 y_3, \\ \dot{y}_3 &= -y_2 + \lambda_2 y_3 + \lambda_1 y_1 y_2 + \lambda_1 \lambda_2 y_1 y_2 y_3, \end{aligned} \tag{3.14}$$

в которой $y = \left(y_1, y_2, y_3\right)$, $\lambda = \left(\lambda_1, \lambda_2\right)$ слагаемые $\lambda_2 y_1$, $\lambda_1 y_3$, $\lambda_1 y_2$, $\lambda_2 y_3$ характеризуют обновление производственных фондов, $\lambda_1 y_2 y_3$, $\lambda_2 y_1 y_3$, $\lambda_1 y_1 y_2$, $\lambda_1 \lambda_2 y_1 y_2 y_3$ – дополнительные члены, которые отображают действие внешних воздействий и объемов производственных фондов.

Математическая задача формулируется так: определить условия существования ненулевого периодического решения системы дифференциальных уравнений с параметром (3.14).

Предполагаем, что в некоторый момент времени известны количество наличных фондов производства $y_0 = (3,2,0)$ и уровень внешних воздействий $\lambda_0 = (-2,0)$.

Непосредственным вычислением убедились, что Якобиан правой части системы (3.14) в стационарной точке $\left(y_0, \lambda_0\right)$ отличен от нуля. Методами, изложенными в работе, установлены условия существования периодического решения системы (3.14).

В результате исследования, определены условия стабильного развития многосекторной экономики при наличии внешних воздействий, найдены границы внешних воздействий, при которых многосекторная экономика развивается стабильно, определены условия циклического развития объема производственных фондов, оценка периода циклического развития фондов.

Рассмотрены численные примеры.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ ОПУБЛИКОВАНО В СЛЕДУЮЩИХ РАБОТАХ:

Статьи в изданиях, рекомендованных ВАК РФ для публикации основных результатов исследования

[1] Терехин, М.Т. Исследование математической модели развития многосекторной экономики / М.Т. Терехин, С.А. Бельман // Вестник Рязанской государственной радиотехнической академии. – 2006. – Вып.18. – С.108 - 115.

[2] Бельман, С.А. О периодических решениях автономной системы дифференциальных уравнений с параметром / С.А. Бельман // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки.– 2008. – Вып.2.– С.18-28.

[3] Бельман, С.А. Математическая модель стабильного развития многосекторной экономики / С.А. Бельман // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. – 2008. – Вып.23.– С.86–90.

Статьи в сборниках научных трудов и тезисов докладов на научно-практических конференциях

[4] Ермакова, С.А. Исследование математической модели развития многосекторной экономики / С.А. Бельман // Тезисы докладов X Всероссийской научно-технической конференции студентов, молодых ученых и специалистов «Новые информационные технологии в научных исследованиях и в образовании «НИТ – 2005». –2005. – С.22.

[5] Бельман, С.А. Построение операторного уравнения для решения задачи существования периодического решения системы дифференциальных уравнений / С.А. Бельман // Аспирантский вестник Рязанского государственного университета С.А.Есенина». – 2007. – Вып.10. – С.3-6.

[6] Бельман, С.А. Математическая модель стабильно развивающегося производства / С.А. Бельман // Тезисы докладов XIII Всероссийской научно-технической конференции студентов, молодых ученых и специалистов «Новые информационные технологии в научных исследованиях и в образовании «НИТ – 2008». – 2008. – Ч.II. – С.35-36.

[7] Бельман, С.А. Сведение проблемы существования ненулевого периодического решения системы дифференциальных уравнений к проблеме разрешимости некоторого операторного уравнения / С.А. Бельман // Аспирантский вестник Рязанского государственного университета С.А.Есенина». – 2008. – Вып.11. – С.3-8.
[8] Бельман, С.А. Об условиях существования ненулевого периодического решения нелинейной системы дифференциальных уравнений с параметром / С.А. Бельман // Известия Российской академии естественных наук. Дифференциальные уравнения. – 2008. – Вып.13. – С. 5-16.
[9] Бельман, С.А. Периодические решения систем дифференциальных уравнений с параметром / С.А. Бельман // Труды Средневолжского математического общества. –2008. – Том 10. – №1. – С. 113-119.
[10] Бельман, С.А. Существование периодического решения системы дифференциальных уравнений с параметром / С.А. Бельман // Тезисы докладов XVI конференции серии «Математика. Компьютер. Образование», Пущино – 2009. – С.18.
[11] Бельман, С.А. Поиск ненулевого решения автономной системы дифференциальных уравнений с параметром / С.А. Бельман // Известия Российской академии естественных наук. Дифференциальные уравнения. – 2009. –Вып.14. – С. 5-16.
[12] Бельман, С.А. Об условиях существования ненулевых решений дифференциальных уравнений специального типа / С.А. Бельман // Современные проблемы математики, механики и их приложений, МГУ – 2009. – С.122-123.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ

– Определены необходимые и достаточные условия существования и отсутствия периодических решений автономной системы дифференциальных уравнений с параметром.

– Разработаны методы отыскания условий разрешимости операторных уравнений, позволяющие устанавливать существование периодических решений системы дифференциальных уравнений с параметром.

– Определены условия существования ненулевого решения в случае, когда матрица линейного приближения зависит от параметра в первой и более высокой степени.

В заключении автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору М. Т. Терехину за руководство, помощь в работе и всестороннюю поддержку.

Бельман Светлана Александровна

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПАРАМЕТРОМ

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Подписано к печати 2011. Формат бумаги 60x84 1/16
Печать офсетная Объем 1,25 п.л. Заказ №
Тираж 100 экз. Бесплатно

Отпечатано в ООО «НПЦ «Информационные технологии»
г. Рязань, ул. Островского, 21/1. Тел.: (0912) 98-69-84